数理解析研究所講究録
1195巻 2001年 139-153

垜積の研究

松永良弼著『算法全経（垜積)』より

藤井康生 (Yasuo Fujii)

『算法全経』では，自然数の冪乗の和を表わす式を，廉式と商式の2方法によって求めることを論じている．廉式を用いる方法は $(n+1)^{p+1}$ の展開を用いる方法である．商式を用いる方法は，二項係数を用いて表わす方法である．これらの方法は，今までにも紹介されてきたが，詳しい説明はなかった．本稿では，『算法全経』をもとに，松永良弼の方法を考察する．

1 廉式

1.1 方垜式

方垜は

$$s_p(n)=\sum_{k=1}^{n}k^p, \tag{1}$$

のことである．

$s_p(n)$ はベルヌーイ数を用いて次のように表される．ここで B_k をベルヌーイ数とする．

$$\begin{aligned} s_p(n)=\frac{1}{p+1}\Big\{[n^{p+1}+\frac{1}{2}\binom{p+1}{1}n^p+B_1\binom{p+1}{2}n^{p-1} \\ -B_2\binom{p+1}{4}n^{p-3}+\cdots \\ +(-1)^{\frac{p}{2}+1}B_{\frac{p}{2}}\binom{p+1}{p}n\Big\},(p:\text{偶数}) \\ +(-1)^{\frac{p+1}{2}}B_{\frac{p-1}{2}}\binom{p+1}{p-1}n^2\Big\},(p:\text{奇数}) \end{aligned} \tag{2}$$

『算法全経』では，方垜 $s_p(n)$ を求める方法として，$(n+1)^{p+1}$ の展開式を用いる方法を述べている．

例えば三乗方垜 $s_4(n)$ の式を求める時は $(n+1)^5$ の展開式を用いる．

$(n+1)^5$の展開式に，$(n+1)^4$の展開式を用いて n^3の項を消去する．

$$\begin{aligned} (n+1)^5 &= n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1 \\ (n+1)^4 &= n^4+4n^3+6n^2+4n+1 \\ 2(n+1)^5-5(n+1)^4 &= 2n^5+5n^4-10n^2-10n-3 \end{aligned}$$

を得る．次に $(n+1)^3$ の展開式を用いて n^2 の項を消去する．

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3+3n^2+3n+1\\ 6(n+1)^5-15(n+1)^4+10(n+1)^3 &= 6n^5+15n^4+10n^3 \qquad +1\end{aligned}$$

を得る．次に $n+1$ を用いて定数項を消去する．

$$\begin{aligned}(n+1) &= n+1\\ 6(n+1)^5-15(n+1)^4+10(n+1)^3-(n+1) &= 6n^5+15n^4+10n^3 \quad -n\end{aligned}$$

以上の計算によって,$30s_4(n)$ が導かれる．
一般の p に対して方垜の式 $s_p(n)$ は，はじめに $(n+1)^{p+1}$ と $(n+1)^p$ の展開式より n^{p-1} の項を消去する，以下順次，$(n+1)^{p-1}$の展開式より n^{p-2} の項を,$(n+1)^{p-3}$の展開式より n^{p-4} の項を消去していき，定数項を消去するまで続ける．
$s_p(n)$ が，この計算方法によって求められることを示す．
$(n+1)^{p+1},(n+1)^p,(n+1)^{p-1},(n+1)^{p-3},\ldots,(n+1)^{p+1-2l}$ まで計算できたとする. 各係数は (2) 式よりわかる．$n^{p+1-(2l+1)}$ 項の係数は 0 になるように各係数は定められている．この時，$n^{p+1-(2l+2)}$ 項の係数は 0 となり，$n^{p+1-(2l+3)}$ 項の係数を消去するように，$(n+1)^{p+1-2(l+1))}$ の係数が求められる．このようにして求められた，$(n+1)^{p+1-2(l+1)}$ の係数が (2) 式と一致していれば成り立つことがわかる．

$$\begin{aligned}(n+1)^{p+1} &= \binom{p+1}{0}n^{p+1}+\binom{p+1}{1}n^p+\binom{p+1}{2}n^{p-1}\\ &\quad +\cdots+\binom{p+1}{k}n^{p+1-k}+\cdots+\binom{p+1}{p+1},\end{aligned}$$

$$\underline{-\frac{1}{2}\binom{p+1}{1}(n+1)^p}$$
$$=-\frac{1}{2}\binom{p+1}{1}\binom{p}{0}n^p-\cdots-\frac{1}{2}\binom{p+1}{1}\binom{p}{k-1}n^{p+1-k}-\cdots,$$
$$\underline{-B_1\binom{p+1}{1}(n+1)^{p-1}}$$
$$=B_1\binom{p+1}{1}\binom{p-1}{0}n^{p-1}+\cdots$$
$$+B_1\binom{p+1}{2}\binom{p-1}{k-2}n^{p+1-k}+\cdots,$$
$$\underline{-B_2\binom{p+1}{4}(n+1)^{p-3}}$$
$$=-B_2\binom{p+1}{4}\binom{p-3}{0}n^{p-3}-\cdots$$
$$-B_2\binom{p+1}{4}\binom{p-3}{k-4}n^{p+1-k}-\cdots,$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$\underline{(-1)^{l+1}B_l\binom{p+1}{2l}}(n+1)^{p+1-2l}$$
$$= (-1)^{l+1}B_l\binom{p+1}{2l}\binom{p+1-2l}{0}n^{p+1-2l}$$
$$+\cdots+(-1)^{l+1}B_l\binom{p+1}{2l}\binom{p+1-2l}{k-2l}n^{p+1-k}+\cdots,$$

次にこれらの式より，n^{p+1-k} の係数を計算する．$k=2l+1$ の時を計算することにより，$k=2l+3$ の時すなわち $(n+1)^{p+1-2(l+1))}$ の係数が求められる．

$$\binom{p+1}{k}-\frac{1}{2}\binom{p+1}{1}\binom{p}{k-1}+B_1\binom{p+1}{2}\binom{p-1}{k-2}$$
$$-B_2\binom{p+1}{4}\binom{p-3}{k-4}+\cdots+(-1)^{l+1}B_l\binom{p+1}{2l}\binom{p+1-2l}{k-2l}$$
$$=\binom{p+1}{k}-\frac{k}{2}\binom{p+1}{k}+\frac{k(k-1)}{2}B_1\binom{p+1}{k}$$
$$-\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}B_2\binom{p+1}{k}$$
$$+\cdots+(-1)^{l+1}B_l\frac{k(k+1)+\cdots+(k-2l+1)}{(2l)!}\binom{p+1}{k}$$
$$=\binom{p+1}{k}\left\{1-\frac{1}{2}\binom{k}{1}+B_1\binom{k}{2}-B_2\binom{k}{4}+\cdots+(-1)^{l+1}B_l\binom{k}{2l}\right\}.$$

$k=2l+1$, $k=2l+2$ のとき,$s_p(1)=1$ より，

$$1-\frac{1}{2}\binom{k}{1}+B_1\binom{k}{2}-B_2\binom{k}{4}$$
$$+\cdots+(-1)^{l+1}B_l\binom{k}{2l}=0.$$

これは，ベルヌーイ数の循環式に他ならない．
$k=2l+3$ のとき，

$$1-\frac{1}{2}\binom{k}{1}+B_1\binom{k}{2}-B_2\binom{k}{4}$$
$$+\cdots+(-1)^{l+1}B_l\binom{k}{2l}+\underline{(-1)^{l+2}B_{l+1}\binom{k}{2l+2}}=0,$$

より $n^{p+1-(2l+3)}$ の項を 0 にするように $(n+1)^{p+1-2(l+1)}$ の係数を決めると (2) 式の係数と一致し, 成り立つことがわかる．

1.2 奇零方垜

奇零方垜は, 奇数の冪の和を作ったもの.

$$1^p+3^p+5^p+\cdots+(2i-1)^p,$$

のことである．奇零方垜式は次のように考えられる．

$$
\begin{aligned}
&s_p(2i)-2^p s_p(i)\\
&=\frac{1}{p+1}\left\{(2i)^{p+1}+\frac{1}{2}\binom{p+1}{1}(2i)^p+B_1\binom{p+1}{2}(2i)^{p-1}\right.\\
&\left.-B_2\binom{p+1}{4}(2i)^{p-3}+\cdots\right\}\\
&-\frac{2^p}{p+1}\left\{i^{p+1}+\frac{1}{2}\binom{p+1}{1}i^p+B_1\binom{p+1}{2}i^{p-1}\right.\\
&\left.-B_2\binom{p+1}{4}i^{p-3}+\cdots\right\}\\
&=\frac{1}{2(p+1)}\left\{(2i)^{p+1}-2B_1\binom{p+1}{2}(2i)^{p-1}\right.\\
&\left.+2(2^3-1)B_2\binom{p+1}{4}(2i)^{p-3}+\cdots\right\}\\
&\text{ここで } n=2i-1 \text{ とする，}\\
&=\frac{1}{2(p+1)}\left\{(n+1)^{p+1}\right.\\
&\left.+\sum_{l=1}^{[\frac{p}{2}]}(-1)^l 2(2^{2l-1}-1)B_l\binom{p+1}{2l}(n+1)^{p-(2l-1)}\right\}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

『算法全経』では方垜と同様に $(n+1)^{p+1}$ の展開式を用いて，奇数方垜の式を求める方法を述べている．
例えば奇数五乗垜の式を求める時は $(n+1)^7$ の展開式を用いる．
$(n+1)^7$ の展開式に，$(n+1)^5$ の展開式を用いて n^4 の項を消去する．

$$
\begin{aligned}
(n+1)^7 &= n^7+7n^6+21n^5+35n^4+35n^3+21n^2+7n+1\\
(n+1)^5 &= n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1\\
(n+1)^7-7(n+1)^5 &= n^7+7n^6+14n^5-35n^3-49n^2+28n-6
\end{aligned}
$$

を得る．次に $(n+1)^3$ の展開式を用いて n^2 の項を消去する．

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 &= n^3+3n^2+3n+1\\
(n+1)^7-21(n+1)^5+49(n+1)^3 &= 3n^7+21n^6+42n^5-56n^3+63n+31
\end{aligned}
$$

を得る．次に $n+1$ を用いて定数項を消去する．

$$
\begin{aligned}
&(n+1)=n+1\\
&3(n+1)^7-21(n+1)^5+49(n+1)^3-31(n+1)\\
&=3n^7+21n^6+42n^5-56n^3+32n
\end{aligned}
$$

以上の計算によって，奇数五乗垜の式を 42 倍した式が導かれる．一般の p に対して奇零方垜の式は，はじめに $(n+1)^{p+1}$ と $(n+1)^{p-1}$ の展開式より n^{p-2} の項を消去する．以下順次，$(n+1)^{p-3}$ の展開式より n^{p-4} 項を消去していき，

定数項を消去するまで，一つ置きに項を消去していく．奇零方垜の式が，この計算方法によって求められることを示す．
$(n+1)^{p+1}, (n+1)^{p-1}, \ldots, (n+1)^{p+1-2l}$ まで計算できたとする．各係数は (3) 式よりわかる．この時，$n^{p+1-(2l+1)}$ 項の係数は 0 となり，$n^{p+1-(2l+1)}$ 項の係数を消去するように,$(n+1)^{p+1-2(l+1)}$ の係数が求められる．このようにして求められた，$(n+1)^{p+1-2(l+1)}$ の係数が (3) 式と一致していれば成り立つことがわかる．

$$\begin{aligned}(n+1)^{p+1} &= \binom{p+1}{0}n^{p+1} + \binom{p+1}{1}n^{p} + \binom{p+1}{2}n^{p-1} \\ &\quad + \cdots + \binom{p+1}{k}n^{p+1-k} + \cdots + \binom{p+1}{p+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\underline{-2B_1\binom{p+1}{1}}(n+1)^{p-1} = -2B_1\binom{p+1}{1}\binom{p-1}{0}n^{p-1} \\ &-\cdots-2B_1\binom{p+1}{2}\binom{p-1}{k-2}n^{p+1-k}-\cdots, \\ &\underline{2(2^3-1)B_2\binom{p+1}{4}}(n+1)^{p-3} = 2(2^3-1)B_2\binom{p+1}{4}\binom{p-3}{0}n^{p-3} \\ &+\cdots+2(2^3-1)B_2\binom{p+1}{4}\binom{p-3}{k-4}n^{p+1-k}+\cdots, \\ &\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ &\underline{(-1)^l 2(2^{2l-1}-1)B_l\binom{p+1}{2l}}(n+1)^{p+1-2l} \\ &= (-1)^l 2(2^{2l-1}-1)B_l\binom{p+1}{2l}\binom{p+1-2l}{0}n^{p+1-2l} \\ &+\cdots+(-1)^l 2(2^{2l-1}-1)B_l\binom{p+1}{2l}\binom{p+1-2l}{k-2l}n^{p+1-k} \\ &+\cdots,\end{aligned}$$

次にこれらの式より，n^{p+1-k} の係数を計算する．

$$\begin{aligned}&\binom{p+1}{k} - 2B_1\binom{p+1}{2}\binom{p-1}{k-2} + 2(2^3-1)B_2\binom{p+1}{4}\binom{p-3}{k-4} \\ &+\cdots+(-1)^l 2(2^{2l-1}-1)B_l\binom{p+1}{2l}\binom{p+1-2l}{k-2l} \\ &= \binom{p+1}{k} - 2B_1\frac{k(k-1)}{2!}\binom{p+1}{k} \\ &+2(2^3-1)B_2\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}B_2\binom{p+1}{k} \\ &+\cdots+(-1)^l 2(2^{2l-1}-1)B_l\frac{k(k+1)+\cdots+(k-2l+1)}{(2l)!}\binom{p+1}{k} \\ &= \binom{p+1}{k}\Big\{1-2B_1\binom{k}{2}+2(2^3-1)B_2\binom{k}{4}\end{aligned}$$

$$+\cdots+(-1)^l 2(2^{2l-1}-1)B_l\binom{k}{2l}\Big\}.$$

$k=2l+1$ のとき,$s_p(1)=1$, $s_p(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^p$ より,

$$1-2B_1\binom{k}{2}+2(2^3-1)B_2\binom{k}{4}+\cdots+(-1)^l 2(2^{2l-1}-1)B_l\binom{k}{2l}=0.$$

$s_p(n)$ は, ベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ を用いて,

$$s_p(n)=\frac{1}{p+1}[B_{p+1}(n)-B_{p+1}(0)]+n^p,$$

と表せる. 上式は $p=2l$ である. ベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ の性質 $B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$ より n が奇数の時 $B_n(\frac{1}{2})=0$ より,$s_p(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^p$ である.
$k=2l+3$ のとき,

$$\begin{aligned}&1-2B_1\binom{k}{2}+2(2^3-1)B_2\binom{k}{4}+\cdots\\&+(-1)^l 2(2^{2l-1}-1)B_l\binom{k}{2l}+\underline{(-1)^{l+1}2(2^{2l+1}-1)B_{l+1}\binom{k}{2l+2}}=0,\end{aligned}$$

より $n^{p+1-(2l+3)}$ の項を 0 にするように, $(n+1)^{p+1-2(l+1)}$ の係数を決めると (3) 式の係数と一致し, 成り立つことがわかる.

1.3 補足 $\frac{1}{\sin x}$ の展開について

松永良弼は『方圓算経』元文四年 (1739) において, 円弧と矢, 弦の関係, 正多角形の一辺と外接円, 内接円の半径の関係を述べている. 正 n 角形の一辺 a が与えられた時, 外接円の半径 R は $R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$, 内接円の半径は $r=\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}$ と表わされる.『方圓算経』ではベルヌーイ数を述べた後, $\frac{1}{2\sin\pi x}$, $\frac{1}{2}\cot\pi x$ の級数展開の各項を載せている. しかし,『方圓算経』には結果を述べているだけで, どの様にして導かれたものかは載せられていない. $\sin x$ の展開式より $\frac{1}{\sin x}$ の展開式を導く計算の過程は, 前節で述べた奇数埰の計算に帰着させられる.

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}\Big\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{2n}-2)B_n}{(2n)!}x^{2n}\Big\},$$

上式を $\sin x$ の展開.

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

を用いて導く.

$$\frac{1}{\sin x}\ =\ \frac{1}{x}\{A_0+A_1x^2+A_2x^4+\cdots+A_nx^{2n}+\dots\},$$

とおく．

$$
\begin{aligned}
1 \;&=\; \frac{1}{x}\Big\{A_0 + A_1x^2 + A_2x^4 + \cdots + A_nx^{2n} + \ldots\Big\}\\
&\quad\times\Big\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\Big\},\\
&\quad A_0 = 1,\quad A_1 - \frac{A_0}{3!} = 0,\quad A_2 - \frac{A_1}{3!} + \frac{A_0}{5!} = 0,
\end{aligned}
$$

上式の x^{2n} の係数を比較する．

$$A_n - \frac{A_{n-1}}{3!} + \frac{A_{n-2}}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{A_{n-1}}{3!} = 0,$$

(2n+1)! を掛ける．

$$
\begin{aligned}
&\binom{2n+1}{2n}\{(2n)!A_n\} - \binom{2n+1}{2n-2}\{(2n-2)!A_{n-1}\} + \binom{2n+1}{2n-4}\{(2n-4)!A_{n-2}\}\\
&+\cdots + (-1)^nA_0 = 0.
\end{aligned}
$$

ここで　$A_n = \dfrac{2(2^{2n-1}-1)B_n}{(2n)!}$　とすると，

$$
\begin{aligned}
&2(2^{2n-1}-1)B_n\binom{2n+1}{2n} - 2(2^{2n-3}-1)B_{n-1}\binom{2n+1}{2n-2} + \cdots +\\
&(-1)^{n-1}2(2-1)B_1\binom{2n+1}{2} + (-1)^n \times 1 = 0,\\
&1 - 2(2-1)B_1\binom{2n+1}{2} + 2(2^3-1)B_2\binom{2n+1}{4} + \cdots +\\
&(-1)^{n-1}2(2^{2n-3}-1)B_{n-1}\binom{2n+1}{2n-2} + (-1)^n2(2^{2n-1}-1)B_n\binom{2n+1}{2n} = 0.
\end{aligned}
$$

上式は奇数埰の計算において用いられた関係である．
次に

$$\cot x = \frac{1}{x}\Big\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n}\Big\}$$

も同様に $\cos x = \cot x \times \sin x$ より求められる．この場合は偶数埰の計算における関係になる．

$$
\begin{aligned}
&1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\\
&= \frac{1}{x}\Big\{A_0 + A_1x^2 + A_2x^4 + \cdots + A_nx^{2n} + \ldots\Big\}\\
&\times\Big\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\Big\},\\
&A_0 = 1,\quad A_1 - \frac{A_0}{3!} = -\frac{1}{2!},\quad A_2 - \frac{A_1}{3!} + \frac{A_0}{5!} = \frac{1}{3!},
\end{aligned}
$$

上式の x^{2n} の係数を比較する.

$$A_n - \frac{A_{n-1}}{3!} + \frac{A_{n-2}}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{A_0}{(2n+1)!} = (-1)^2 \frac{1}{(2n)!}$$

$$\binom{2n+1}{2n}\{(2n)!A_n\} - \binom{2n+1}{2n-2}\{(2n-2)!A_{n-1}\} + \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2}\{2!A_1\} + (-1)^n A_0 = (-1)^n(2n+1),$$

ここで $A_n = -\dfrac{2^{2n}B_n}{(2n)!}$ とすると,

$$-2^{2n}B_n\binom{2n+1}{2n} + 2^{2n-2}B_{n-1}\binom{2n+1}{2n-2} + \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}2^4B_2\binom{2n+1}{4} + (-1)^n 2^2 B_1\binom{2n+1}{2} + (-1)^n \times 1 = (-1)^n(2n+1),$$

$$1 = \frac{1}{2(2n+1)}\left\{1 + \binom{2n+1}{1} + 2^2B_1\binom{2n+1}{2} - 2^4B_2\binom{2n+1}{4} + \cdots\right.$$

$$\left. +(-1)^n 2^{2n-2}\binom{2n+1}{2n-2} + (-1)^{n+1}2^{2n}B_n\binom{2n+1}{2n}\right\}.$$

上式は p を偶数として, 偶数垜 $2^pS_p(i)$ より導かれる.

1.4 方垜衰積

方垜衰積は

$$\sum_{k=1}^{n} s_p(k),$$

のことである.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} s_p(k) &= \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)k^p \\
&= (n+1)\sum_{k=1}^{n}k^p - \sum_{k=1}^{n}k^{p+1} \\
&= \frac{1}{p+1}\left\{(n+1)^{p+2} - \frac{1}{2}\binom{p+1}{1}(n+1)^{p+1}\right. \\
&\quad \left. +B_1\binom{p+1}{2}(n+1)^p - B_2\binom{p+1}{4}(n+1)^{p-2} + \ldots\right\} \\
&\quad -\frac{1}{p+2}\left\{(n+1)^{p+2} - \frac{1}{2}\binom{p+2}{1}(n+1)^{p+1}\right. \\
&\quad \left. +B_1\binom{p+2}{2}(n+1)^p - B_2\binom{p+2}{4}(n+1)^{p-2} + \ldots\right\} \\
&= \frac{1}{(p+1)(p+2)}\left\{(n+1)^{p+2} - B_1\binom{p+2}{2}(n+1)^p\right.
\end{aligned}$$

$$+3B_2\binom{p+2}{4}(n+1)^{p-2}-\dots\Big\}. \tag{4}$$

『算法全経』では，方垜，奇零方垜と同様に $(n+1)^{p+2}$ の展開を用いて，方垜衰積の式を求める方法を述べている．
例えば四乗方衰垜 $\sum_{k=1}^{n} s_5(k)$ の式を求める時は $(n+1)^7$ の展開式を用いる．
$(n+1)^7$ の展開式に，$(n+1)^5$ の展開式を用いて n^3 の項を消去する．

$$\begin{aligned}
(n+1)^7 &= n^7+7n^6+21n^5+35n^4+35n^3+21n^2+7n+1\\
(n+1)^5 &= n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1\\
2(n+1)^7-7(n+1)^5 &= 2n^7+14n^6+35n^5+35n^3-28n^2-21n-5
\end{aligned}$$

を得る．次に $(n+1)^3$ の展開式を用いて n の項を消去する．

$$(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1$$

$$\begin{aligned}
&2(n+1)^7-7(n+1)^5+7(n+1)^3\\
&=2n^7+14n^6+35n^5+35n^4+7n^3-7n^2+2
\end{aligned}$$

を得る．次に $n+1$ を用いて定数項を消去する

$$(n+1)=n+1$$

$$\begin{aligned}
&2(n+1)^7-7(n+1)^5+7(n+1)^3-2(n+1)\\
&=2n^7+14n^6+35n^5+35n^4+7n^3-7n^2-2n
\end{aligned}$$

以上の計算によって,$84\sum_{k=1}^{n} s_5(k)$ が導かれる．一般の p に対して方垜衰積の式は，はじめに $(n+1)^{p+2}$ と $(n+1)^p$ の展開式より n^{p-2} の項を消去する．以下順次，$(n+1)^{p-2}$ の展開式より n^{p-4} の項を消去していき，定数項を消去するまで，一つ置きに項を消去していく．
方垜衰積の式が，この計算方法によって求められることを示す．
$(n+1)^{p+2},(n+1)^p,\dots,(n+1)^{p+2-2l}$ まで計算できたとする．各係数は (4) 式よりわかる．この時，$n^{p+2-(2l+2)}$ 項の係数は 0 となり，$n^{p+2-(2l+4)}$ 項の係数を消去するように,$(n+1)^{p+2-2(l+1)}$ の係数が求められる．このようにして求められた，$(n+1)^{p+2-2(l+1)}$ の係数が (4) 式と一致していれば成り立つことがわかる．

$$\begin{aligned}
(n+1)^{p+2} &= \binom{p+2}{0}n^{p+2}+\binom{p+2}{1}n^{p+1}+\binom{p+2}{2}n^p\\
&\quad+\dots+\binom{p+2}{k}n^{p+2-k}+\dots+\binom{p+2}{p+2},
\end{aligned}$$

$$\underline{-B_1\binom{p+2}{2}}(n+1)^p=-B_1\binom{p+2}{2}\binom{p}{0}n^p$$

$$- \cdots - B_1 \binom{p+1}{2} \binom{p}{k-2} n^{p+2-k} - \cdots,$$

$$\underline{3B_2 \binom{p+2}{4}} (n+1)^{p-2} = 3B_2 \binom{p+2}{4} \binom{p-2}{0} n^{p-2}$$

$$+ \cdots + 3B_2 \binom{p+2}{4} \binom{p-2}{k-4} n^{p+2-k} + \cdots,$$

$$\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$\underline{(-1)^l (2l-1) B_l \binom{p+2}{2l}} (n+1)^{p+2-2l}$$

$$= (-1)^l (2l-1) B_l \binom{p+2}{2l} \binom{p+2-2l}{0} n^{p+2-2l}$$

$$+ \cdots + (-1)^l (2l-1) B_l \binom{p+2}{2l} \binom{p+2-2l}{k-2l} n^{p+2-k}$$

$$+ \cdots,$$

次にこれらの式より，n^{p+2-k} の係数を計算する．

$$\binom{p+2}{k} - B_1 \binom{p+2}{2} \binom{p}{k-2} + 3B_2 \binom{p+2}{4} \binom{p-2}{k-4}$$

$$+ \cdots + (-1)^l (2l-1) B_l \binom{p+2}{2l} \binom{p+2-2l}{k-2l}$$

$$= \binom{p+2}{k} \left\{ 1 - B_1 \binom{k}{2} + 3B_2 \binom{k}{4} \right.$$

$$\left. + \cdots + (-1)^l (2l-1) B_l \binom{k}{2l} \right\},$$

$k = 2l+2$ のとき,$s_p(1) = 1$ より，

$$1 - 2B_1 \binom{k}{2} + 3B_2 \binom{k}{4} + \cdots + (-1)^l (2l-1) B_l \binom{k}{2l} = 0,$$

$k = 2l+4$ のとき，

$$1 - 2B_1 \binom{k}{2} + 3B_2 \binom{k}{4} + \cdots$$

$$+ (-1)^l (2l-1) B_l \binom{k}{2l} + \underline{(-1)^{l+1} (2l+1) B_{l+1} \binom{k}{2l+2}} = 0,$$

より $n^{p+2-(2l+4)}$ の項を 0 にするように，$(n+1)^{p+2-2(l+1)}$ の係数を決めると (4) 式の係数と一致し,成り立つことがわかる．

2 商式

2.1 方垛式

方垛の式を求めるために，衰垛の式（二項係数）を用いる方法を述べている．

$$k^j = \sum_{i=1}^{j} b_{j\ i} \binom{j+k-i}{j},$$

上式がすべての自然数 k に対して成立するような, $\binom{j+k-i}{j}$ の係数 $b_{j\ i}$ が唯一存在する.
このことは, j 次多項式

$$f_{j\ i}(x) = \frac{1}{j!}(x+1-i)\cdots(x+j-i),$$

は高々 j 次多項式の空間で基底をなし,

$$f_{j\ i}(0) = 0 \quad 1 \le i \le j,$$

$$f_{j\ 0}(0) \neq 0,$$

であるので,

$$x^j = \sum_{i=1}^{j} b_{j\ i} f_{j\ i}(x),$$

となる, $b_{j\ i}$ が唯一存在する.
方垜の式は $b_{j\ i}$ を用いて次のように表され, その表し方は唯一つである.

$$s_j(n) \quad = \quad \sum_{i=1}^{j} b_{j\ i} \binom{j+n+1-i}{j+1}, \tag{5}$$

(j +1) 次多項式

$$g_{j\ i}(x) = \frac{1}{(j+1)!}(x+1-i)\cdots(x+j+1-i), \quad (1 \le i \le j),$$

は高々 (j +1) 次で, $x=0, x=-1$ の時 0 となる多項式の空間で基底をなし,

$$g_{j\ i}(-1) = g_{j\ i}(0) = 0 \quad (1 \le i \le j),$$

であるので, $s_j(n)$ を x の多項式と考えた $s_j(x)$ は, $g_{j\ 1}\ldots g_{j\ j}$ で唯一通りに表される. $b_{j\ i}$ には次の関係がある.

定理 1

$$b_{j\ 1} = 1, \quad b_{j\ j} = 1, \tag{6}$$

$$b_{j\ i} = i b_{j-1\ i} + (j-i+1) b_{j-1\ i-1}, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{j} b_{j\ i} = j!, \tag{8}$$

$$b_{j\ i} = \sum_{l=0}^{i-1} (-1)^l (i-l)^j \binom{j+1}{l}. \tag{9}$$

証明　(8) 式は漸化式 (7) より j に関する帰納法を用いて次のように導かれる.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j} b_{j\ i} &= \sum_{i=1}^{j}\{ib_{j-1\ i}+(j-i+1)b_{j-1\ i-1}\}\\ &= \sum_{i=1}^{j}\{ib_{j-1\ i}+(j-i)b_{j-1\ i}\}\\ &= \sum_{i=1}^{j-1} jb_{j-1\ i}=j!.\end{aligned}$$

次に 漸化式 (7) が成り立つ事を示す.

$$(j+1)k=i(k+j-i+1)+(j-i+1)(k-i),$$

によって,

$$\begin{aligned}& b_{j\ i}\binom{j+k-i}{j}k\\ &= b_{j\ i}\frac{(j+k-i)\dots(k-i+1)}{j!(j+1)}\{i(k+j-i+1)+(j-i+1)(k-i)\}\\ &= ib_{j\ i}\binom{j+k+1-i}{j+1}+(j-i+1)b_{j\ i}\binom{j+k-i}{j+1},\end{aligned}$$

と変形できる.

$$\begin{aligned}k^{j+1} &= \sum_{i=1}^{j+1} b_{j+1\ i}\binom{j+k+1-i}{j+1}\\ &= \sum_{i=1}^{j} b_{j\ i}\binom{j+k-i}{j}k\\ &= \sum_{i=1}^{j}\left\{ib_{j\ i}\binom{j+k+1-i}{j+1}+(j-i+1)b_{j\ i}\binom{j+k-i}{j+1}\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{j+1}\{ib_{j\ i}+(j-i+2)b_{j\ i-1}\}\binom{j+k+1-i}{j+1},\end{aligned}$$

この関係より $b_{j\ i}$ の一意性によって，漸化式は導かれる.
次に,$b_{j\ i}$ を求める.
$i=1$ の時 (5) 式において $n=1$ とすれば,

$$1^j=b_{j\ 1}\binom{j+1}{j+1}\quad \text{により}$$

$$b_{j\ 1}=1\quad \text{を得る.}$$

$n\leq j$ に対して (5) 式の右辺中の $b_{j\ i}$ に，(9) 式の右辺を代入し，両辺を比較すると，$k\leq n$ の時，k^j 項より

$$k^j = k^j\binom{j+n+1-k}{j+1}-k^j\binom{j+1}{1}\binom{j+n-k}{j+1}$$

$$+\cdots+(-1)^{n-k}k^j\binom{j+1}{n-k}\binom{j+1}{j+1},$$

よって

$$1 \;=\; \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{j+1}{i}\binom{j+n+1-k-i}{j+1},$$

が成り立てば $b_{j\ i}$ の一意性によって (9) 式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\binom{j+1}{i}\binom{j+n-i}{j+1} &= \frac{(j+1)!}{i!(j+1-i)!}\frac{(j+n-i)!}{(j+1)!(n-i-1)!} \\
&= \frac{(j+n-i)\ldots(j+2-i)}{i!(n-i-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}\frac{(j+n-i)\ldots(j+2-i)}{(n-1)!} \\
&= \binom{n-1}{i}\binom{j+n-i}{n-1}.
\end{aligned}$$

であるので次の補題を示す.

補題 1

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\binom{j+n-i}{n-1}=1.$$

$$\binom{n-1}{i}=\binom{n-2}{i}+\binom{n-2}{i-1},$$

より

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\binom{j+n-i}{n-1} \\
=\; &\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\left\{\binom{n-2}{i}\binom{j+n-i}{n-1}-\binom{n-2}{i}\binom{j+n-(i+1)}{n-1}\right\} \\
=\; &\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\binom{n-2}{i}\frac{1}{(n-1)!}\Big\{(j+n-i)\ldots(j+2-i) \\
&-(j+n-i-1)\ldots(j+1-i)\Big\} \\
=\; &\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\binom{n-2}{i}\frac{1}{(n-1)!}(j+n-i-1)\ldots(j+2-i) \\
&\times\Big\{(j+n-i)-(j+1-i)\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\binom{n-2}{i}\frac{1}{(n-2)!}(j+n-i-1)\ldots(j+2-i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\binom{n-2}{i}\binom{j+n-i-1}{n-2}
\end{aligned}
$$

これは $n-1$ の時になる，以下同様にして

$$
= \sum_{i=0}^{0}(-1)^i\binom{0}{i}\binom{j-i+1}{0} = 1.
$$

補題が成り立つことが示せた．よって (9) 式が成り立つ．

(9) 式が漸化式 (7) を満たすことは，

$$
\begin{aligned}
& ib_{j-1\ i} + (j+1-i)b_{j-1\ i-1} \\
&= \sum_{l=0}^{i-1}(-1)^l i(i-l)^{j-1}\binom{j}{l} + \sum_{l=0}^{i-2}(-1)^l(j+1-i)(i-l-1)^{j-1}\binom{j}{l} \\
&= i^j\binom{j}{0} - \sum_{l=0}^{j-2}(-1)^l i(i-l-1)^{j-1}\left\{\binom{j}{l+1}+\binom{j}{l}\right\} \\
&+ \sum_{l=0}^{j-2}(-1)^l(j+1)(i-l-1)^{j-1}\binom{j}{l} \\
&= i^j\binom{j}{0} - \sum_{l=0}^{j-2}(-1)^l i(i-l-1)^{j-1}\binom{j+1}{l+1} + \sum_{l=0}^{j-2}(-1)^l(l+1)(i-l-1)^{j-1}\binom{j+1}{l+1} \\
&= i^j\binom{j+1}{0} + \sum_{l=1}^{j-1}(-1)^l i(i-l)^{j-1}\binom{j+1}{l} - \sum_{l=1}^{j-1}(-1)^l l(i-l)^{j-1}\binom{j+1}{l} \\
&= \sum_{l=0}^{i-1}(-1)^l(i-l)^j\binom{j+1}{l} \\
&= b_{j\ i}.
\end{aligned}
$$

より (9) 式が漸化式 (7) を満たすことが示せた．

2.2 垜術餘毫の方垜商式

『算法全経』では，垜術余毫において，方垜積を求めるため、商式として述べている部分について，垜積を係数とする多項式を，衰垜を係数とする多項式で割った商が商式であると述べている．平方垜は平方数を係数とする多項式を，三角衰垜を係数とする多項式で割る，

$$
[\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}] \div [\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k+1}{2}x^{k-1}] = 1+x,
$$

同様に，立方垜は，立方数を係数とする多項式を，再乗衰垜を係数とする多項式で割る．

$$[\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^{k-1}] \div [\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{3} x^{k-1}] = 1 + 4x + x^2,$$

本文では，さらに三乗方垜について計算し，四乗以上同様に成り立つと述べている．一般にこの事は，先に述べた $b_{j\ i}$ を用いて

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^j x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+j-1}{j} x^{k-1} \sum_{i=1}^{j} b_{j\ i} x^{i-1},$$

と表される．そして上式の両辺の x^{k-1} の係数を比較する事によって，

$$k^j = \sum_{i=1}^{j} \binom{k+j-i}{j} b_{j\ i},$$

と成る．商式は，ここで述べられている計算の試行錯誤によって見つけられたものであると考えられる．

参考文献

[1] 平山締・内藤淳著『松永良弼』　東京法令　昭和６２年

[2] 日本学士院編『明治前日本数学史　第二巻』　岩波書店　昭和３１年

[3] 林鶴一著『和算研究集録上巻』　東京開成館　昭和１２年